

**Второй (муниципальный) тур всероссийской олимпиады
школьников по математике в 2023-2024 учебном году**

7 класс

1. Трое мужчин пришли к парикмахеру. Побрив первого, тот сказал: «Посмотри сколько денег в ящике стола, положи столько же и возьми 2 рубля сдачи». Тоже он сказал второму и третьему. Когда они ушли, оказалось, что в ящике денег нет. Сколько было денег в ящике первоначально, если всем удалось совершить задуманное?

Решение. После того, как третий положил свои деньги, в столе оказалось 2 рубля. Это означает, что перед тем, как он это сделал, в столе был 1 рубль. Значит, после того, как второй положил деньги, в столе было 3 рубля, а перед тем, как он это сделал, в столе было 1,5 рубля. Рассуждая аналогично для первого, получаем, что перед приходом первого в столе был $(1,5+2):2=1,75$ рублей.

Ответ. 1,75 рублей.

2. В компании из 7 детей для каждого мальчика найдутся не менее трёх других мальчиков, которые родились в одном месяце. Докажите, что все 7 мальчиков родились в одном месяце.

Решение. Рассмотрим мальчика № 1. Тогда найдутся мальчики (пусть это № 2, № 3, № 4), которые родились с ним в одном месяце. Далее для каждого из мальчиков № 5, № 6, № 7 среди № 1 - № 4 найдётся хотя бы один мальчик, который родился с ним в одном месяце. Значит, все они родились в одном месяце.

3. Пловец, плывший по реке против течения, потерял под мостом флягу, но заметил это только через 3 минуты. Он сразу поплыл назад и догнал флягу в 150 м от моста. Какова скорость течения на этом участке реки?

Решение. Пловец удалялся от фляги только за счет своих гребных усилий (скорость течения реки одинаково накладывалась на скорость пловца и скорость

фляги), поэтому он плыл в сторону фляги, как и удалялся от нее, 3 минуты. За эти 6 минут фляга уплыла от моста на 150 м, а так как удалялась от моста она со скоростью течения реки, то скорость течения реки вблизи моста составляет $\frac{150}{6} = 25 \left(\frac{\text{м}}{\text{мин}} \right)$.

Ответ. 25 м / мин.

4. За весну Обломов сбавил в весе 25%, за лето прибавил 20%, за осень опять сбавил 10%, а за зиму прибавил 20%. Похудел он или поправился за год?

Решение. Пусть m_0 – вес (точнее, масса) Обломова в начале весны, m_1 – его вес в самом конце весны (и самом начале лета), m_2 – вес Обломова в конце лета – начале осени, m_3 – в конце осени – начале зимы, m_4 – в конце зимы. Согласно условиям

$$m_1 = \frac{100\% - 25\%}{100\%} m_0 = \frac{75}{100} m_0 = \frac{3}{4} m_0,$$

$$m_2 = \frac{100\% + 20\%}{100\%} m_1 = \frac{120}{100} m_1 = \frac{6}{5} m_1,$$

$$m_3 = \frac{100\% - 10\%}{100\%} m_2 = \frac{90}{100} m_2 = \frac{9}{10} m_2,$$

$$m_4 = \frac{100\% + 20\%}{100\%} m_3 = \frac{120}{100} m_3 = \frac{6}{5} m_3.$$

Соединяя эти условия, получим

$$m_4 = \frac{6}{5} m_3 = \frac{6}{5} \cdot \frac{9}{10} m_2 = \frac{6}{5} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{6}{5} m_1 = \frac{6}{5} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{3}{4} m_0 = \frac{243}{250} m_0 < m_0.$$

Ответ. По результатам года Обломов сбавил в весе.

5. Прямоугольник площадью 100 см^2 разделен на 9 меньших прямоугольников, как показано на рисунке. Чему равна площадь прямоугольника Е, если площадь А равна 4 см^2 , площадь В равна 14 см^2 , площадь С равна 3 см^2 , а площадь D – 6 см^2 ?

		С
Е	А	Д
	В	

Решение. Пусть x – ширина, а y – высота прямоугольника А. Тогда $xy=4$. Поскольку ширина прямоугольника В равна x , а площадь – 14 , его высота равна $3,5y$. Аналогично получаем, что ширина прямоугольника D равна $1,5x$. Наконец, так как ширина С равна $1,5x$, а площадь – 6 , его высота равна $0,5y$. Таким образом, высота «большого» прямоугольника равна $5y$. Пусть X – ширина прямоугольника Е. Тогда ширина «большого» прямоугольника равна $X + 2,5x$, а его площадь – $(X + 2,5x) \times 5y = 100$, откуда получается, что $5Xy + 12,5xy = 100$, $Xy + 2,5xy = 20$. Так как $xy = 4$, то площадь Е равна $Xy = 20 - 2,5 \times 4 = 10 \text{ (см}^2\text{)}$.

Ответ. 10 см^2 .

8 класс

1. Напишите в строчку первые 10 простых чисел. Как вычеркнуть 6 цифр, чтобы получилось наибольшее возможное число?

Решение: Заметим, что первые 10 простых чисел составят 16-значное число.

Вот первые десять простых чисел, записанных подряд: 2357111317192329. Получится число 7317192329.

Ответ. 7317192329

2. Дорога из пункта А в пункт Б идёт сначала в гору, а потом под гору. Кошка доходит из А в Б за 2 часа 12 минут, обратный путь занимает у неё на 6 минут больше. Скорость кошки, идущей в гору, 4 км/ч , а под гору — 5 км/ч .

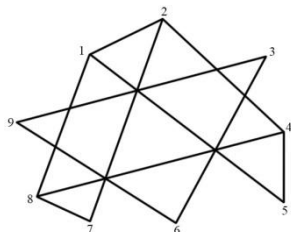
Сколько километров составляет путь от А до Б? (Приведите полное решение, а не только ответ.)

Решение. Когда кошка идёт в гору, то на 1 км она тратит 15 минут, а когда под гору – 12 минут. То есть, при перемене направления время, которое тратится на 1 км, меняется на 3 минуты. Так как на обратный путь кошка потратила на 6 минут больше, то участок, идущий в гору, на обратном пути на 2 км больше. Пусть длина участка на пути из А в Б, идущего в гору, равна x . Тогда можно составить уравнение $15x + 12(x + 2) = 132$, откуда $x = 4$. Значит, весь путь равен $x + (x + 2) = 4 + 6 = 10$ км.

Ответ. 10 км.

3. В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что 2 города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр - названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9? Ответ обоснуйте.

Решение. Составим граф. Из графа видно, что ответ на поставленный вопрос отрицательный.



Следовательно, нельзя.

Ответ. Нельзя.

4. Биржевые цены на нефть в течение недели менялись следующим образом: в понедельник цена нефти выросла на 2%, а во вторник она снизилась на 3%; в среду цена нефти снова выросла – на 4%, а в четверг снизилась на те же 4%; в пятницу она снова выросла – на этот раз на 3%, в субботу – снизилась на 2%; по воскресеньям же биржа не работает. Каков результат недельных колебаний цен: снизилась или повысилась цена нефти в конце недели по сравнению с первоначальной?

Решение. Изменение величины x на $y\%$, после чего она принимает значение z , описывается формулой

$$z = x \cdot \frac{100\% \pm y\%}{100\%} = x \cdot \frac{100 \pm y}{100},$$

где знак «+» выбирается при увеличении первоначальной величины x на $y\%$ и знак «-» выбирается при уменьшении первоначальной величины x на $y\%$.

Пусть m_0 – первоначальная цена нефти, например, цена барреля нефти, а m_k – цена нефти в конце k -того дня торгов. По условию задачи:

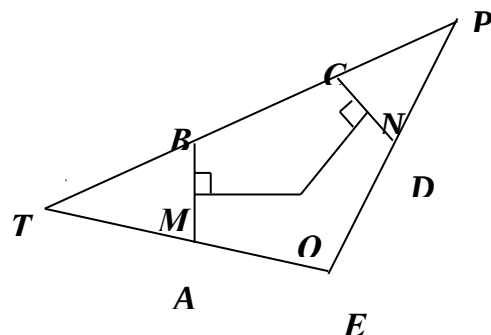
$$m_6 = m_0 \frac{100-2}{100} \cdot \frac{100+3}{100} \cdot \frac{100-4}{100} \cdot \frac{100+4}{100} \cdot \frac{100-3}{100} \cdot \frac{100+2}{100} = m_0 \frac{100^2-2^2}{100^2} \cdot \frac{100^2-3^2}{100^2} \cdot \frac{100^2-4^2}{100^2}.$$

Ясно, что m_0 умножается на число, меньшее единицы, поэтому $m_6 < m_0$.

Ответ. За неделю торгов цена на нефть упала.

5. Все углы пятиугольника $ABCDE$ равны. Доказать, что серединные перпендикуляры к отрезкам AB и CD пересекаются на биссектрисе угла E .

Решение. $ABCDE$ – пятиугольник с равными углами, OM , ON – серединные перпендикуляры к AB и CD , соответственно. Продолжим AE и BC до пересечения в точке T . Продолжим ED и BC до пересечения в точке P . Сумма углов $ABCDE$ равна 540° , следовательно, каждый угол пятиугольника равен 108° . $\angle TAB = \angle TBA = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$. Треугольник ATB –



равнобедренный, значит его вершина T лежит на продолжении OM . Аналогично, в треугольнике CPD вершина P лежит на продолжении ON . OT и OP – биссектрисы углов $BT A$ и CPD , следовательно, O – точка пересечения биссектрис в треугольнике TPE .

9 класс

1. Не прибегая к приближенным вычислениям, сравнить числа

$$a = \sqrt{34} + 5, \quad c = \sqrt{54} + 3.$$

Решение. Из трех гипотез: $a < c$, $a = c$, $a > c$, проверим первую ($a < c$):

$$\begin{aligned} (\sqrt{34} + 5 < \sqrt{54} + 3) &\Leftrightarrow (\sqrt{34} + 2 < \sqrt{54}) \Leftrightarrow ((\sqrt{34} + 2)^2 < 54) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (34 + 4\sqrt{34} + 4 < 54) \Leftrightarrow (4\sqrt{34} < 16) \Leftrightarrow (\sqrt{34} < 4) \Leftrightarrow 34 < 16 \end{aligned}$$

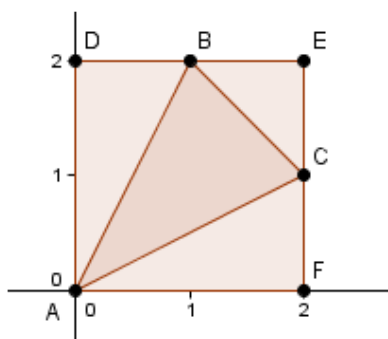
– получили очевидно неверное неравенство, поэтому неверно и равносильное ему неравенство $a < c$. Таким же образом опровергается и вторая из гипотез ($a = c$) и подтверждается третья гипотеза ($a > c$).

Ответ. $a > c$.

2. В декартовой плоскости задан треугольник с вершинами в точках:

$A(2023;2023)$, $B(2024;2025)$, $C(2025;2024)$. Найти площадь треугольника.

Решение. Для удобства произведем параллельный перенос треугольника на вектор $(-2023, -2023)$ (параллельный перенос сохраняет равенство фигур и равенство их площадей). Для вершин полученного треугольника сохраним те же обозначения: $A(0;0)$, $B(1;2)$, $C(2;1)$ (см. рис.).



Впишем $\triangle ABC$ в прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям, с вершинами в точках $A(0;0)$, $D(0;2)$, $E(2;2)$, $F(2;0)$. Площадь прямоугольника $ADEF$ $2 \times 2 = 4$. Треугольник ABC получим, вырезав из $ADEF$ треугольники ADB , AFC , BEC , площади которых 1, 1 и 0,5. Соответственно

этому найдем площадь треугольника ABC : $4 - 2,5 = 1,5$.

Ответ. Площадь треугольника ABC равна 1,5 ед².

3. Катер плыл по течению реки 2 часа, после чего сломался мотор, который команда катера ремонтировала 1 час (а катер плыл по течению). После этого катер вернулся обратно за 3 часа. Сколько времени потребовалось бы катеру на возвращение, если бы ремонт мотора продолжался 2 часа?

Решение. Если бы одновременно с катером отплыл плот, то катер встретил бы его через $2 + 1 + 2 = 5$ часов после отправления. За оставшийся час катер прошел расстояние, которое плот преодолел за 5 часов. Во 2-м случае катер встретит плот через 6 часов после отправления, поэтому ему останется пройти в 1,2 раза большее расстояние, на что уйдет 1,2 часа.

Ответ: 3 часа 12 минут.

4. Пусть p, q – два последовательных нечетных простых числа. Доказать, что $p + q$ есть произведение не менее трех натуральных чисел, больших единицы, но не обязательно различных.

Решение. Во-первых, число $\frac{p+q}{2}$ – целое, т.к. $p + q$ – четное, во-вторых, $\frac{p+q}{2}$ не простое, так как находится между соседними простыми числами p и q . Следовательно, $\frac{p+q}{2}$ раскладывается в произведение двух множителей, а $p + q$ раскладывается в произведение этих же сомножителей и двойки.

5. Точка D – середина стороны AC треугольника ABC . На стороне BC выбрана такая точка E , что угол BEA равен углу CED . Найти отношение длин отрезков AE и DE .

Решение. Пусть $\angle BEA = \angle DEC = \varphi$

На продолжении AE за точку E выберем точку P такую, что $ED = EP$,

на продолжении DE за точку E выберем точку K такую, что $AE = EK$.

$\angle REK = \angle PEQ = \varphi$, следовательно, RE

и EQ – серединные перпендикуляры к

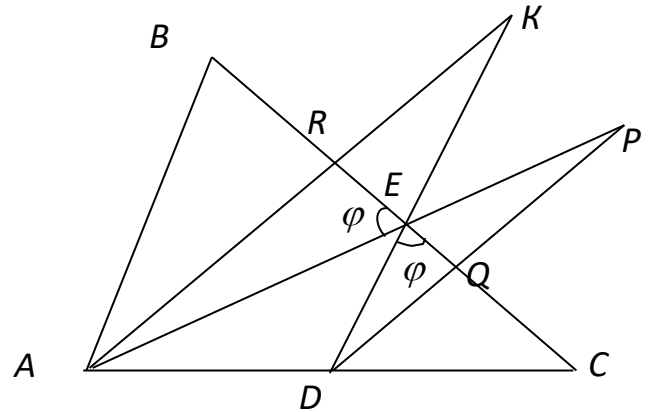
AK и DP соответственно.

Прямоугольные треугольники RKE и

EPQ подобны, значит, $KE:EP = RK:QP$ или $AE:ED = AR:DQ$. DQ – средняя

линия в треугольнике ARC , следовательно, $AE:ED = 2:1$.

Ответ. 2:1



10 класс

1. Выяснить, при каких условиях для параметров a, b, c, d параболы

$$y = x^2 + ax + b, y = x^2 + cx + d$$

не имеют общих точек.

Решение. Координаты точки пересечения линий должны удовлетворять системе, составленной из уравнений линий:

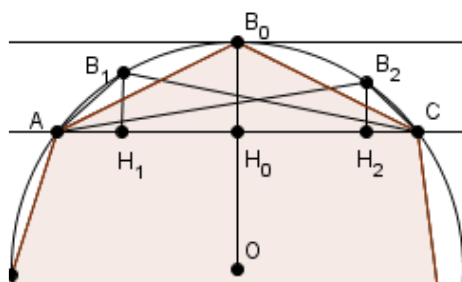
$$\begin{cases} y = x^2 + ax + b \\ y = x^2 + cx + d \end{cases} \Rightarrow x^2 + ax + b = x^2 + cx + d \Leftrightarrow (a - c)x = (d - b)$$

Система не имеет решений, если не имеет их полученное из нее линейное уравнение, а это равносильно тому, что $a = c, b \neq d$.

Ответ. При $a = c, b \neq d$.

2. Показать, что из всех n -угольников с данным числом сторон n , вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет правильный n -угольник.

Решение. Рассмотрим некоторый n -угольник, вписанный в окружность с центром O и радиусом R и две его смежные стороны AB и BC . Зафиксируем все вершины многоугольника, кроме вершины B , которую будем смещать по дуге AC с целью



увеличения площади многоугольника. При указанных смещениях точки B (см. рис.) площадь многоугольника меняется лишь за счет площади $\triangle ABC$, которая (при фиксированном AC) меняется лишь за счет высоты ($S = \frac{1}{2}AC \cdot h_B$). Из всех

треугольников с основанием AC и вершиной на дуге AC наибольшую площадь имеет равнобедренный $\triangle AB_0C$, вершина B_0 которого лежит на серединном перпендикуляре к AC : серединный перпендикуляр к хорде проходит через центр окружности; касательная к окружности в т. B_0 параллельна AC , и в полосе между ними лежит вся дуга AC ; B_0 – наиболее удаленная от прямой AC точка дуги AC .

Итак, если n -угольник, вписанный в окружность, имеет наибольшую площадь среди всех вписанных в ту же окружность n -угольников, то равны между собой любые две его смежные стороны, значит, равны все стороны. Равенство углов вытекает из равенства центральных углов, опирающихся на равные стороны – хорды.

3. Не прибегая к приближенным вычислениям, сравнить числа

$$a = \sqrt{12} + 3, \quad c = \sqrt{32} + 1.$$

Решение. Из трех гипотез: $a < c$, $a = c$, $a > c$, каждая из которых исключает две другие, проверим первую ($a < c$):

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{12} + 3 < \sqrt{32} + 1) &\Leftrightarrow (\sqrt{12} + 2 < \sqrt{32}) \Leftrightarrow ((\sqrt{12} + 2)^2 < 32) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (12 + 4\sqrt{12} + 4 < 32) \Leftrightarrow (4\sqrt{12} < 16) \Leftrightarrow (\sqrt{12} < 4) \Leftrightarrow 12 < 16
 \end{aligned}$$

– получили очевидно верное неравенство, поэтому верно и равносильное ему неравенство $a < c$.

Ответ. $a < c$.

4. В корзине 2021 белый шар, 2022 черных и 2023 красных. Какое наименьшее число шаров надо извлечь из корзины, чтобы среди них гарантированно оказались два шара одного цвета?

Решение. Четырех шаров достаточно: среди четырех шаров все шары не могут быть разных цветов (имеются шары трех цветов) и, значит, есть хотя бы два шара одного цвета. Если будут вынуты только три шара, то все они могут оказаться разных цветов (один белый, один черный, один красный), т.е. наличие одноцветной пары при выемке трех шаров не гарантировано.

Ответ. Четыре шара.

5. Решить в целых числах уравнение

$$2x^2 + 2x^2z^2 + z^2 + 7y^2 - 42y + 33 = 0.$$

Решение. Преобразуем уравнение к виду:

$$2x^2 + 2x^2z^2 + z^2 + 7(y - 3)^2 = 30.$$

Возможны 3 случая:

$$1) |y - 3| = 0, \quad 2) |y - 3| = 1, \quad 3) |y - 3| = 2$$

В первом случае получим уравнение $2x^2 + 2x^2z^2 + z^2 = 30$. Решая его как квадратное относительно x , получим $(2x^2 + 1)(1 + z^2) = 31$. Перебирая положительные множители числа 31, приходим к выводу, что решений в целых числах нет.

Во втором случае получим уравнение $2x^2 + 2x^2z^2 + z^2 = 23$. Решая его как квадратное относительно x , получим $(2x^2 + 1)(1 + z^2) = 24$. Перебирая положительные множители числа 24, приходим к выводу, что решений в целых числах нет.

В третьем случае получим уравнение $2x^2 + 2x^2z^2 + z^2 = 2$. Решая его как квадратное относительно x , получим $(2x^2 + 1)(1 + z^2) = 3$. Перебирая положительные множители числа 3, приходим к решениям:

$$1) x = 1, z = 0; \quad 2) x = -1, z = 0.$$

Вспоминаем, что в этом случае $|y - 3| = 2$, а следовательно, $y = 5, y = 1$.

Таким образом, получаем 4 решения: $(1; 5; 0), (-1; 5; 0), (1; 1; 0), (-1; 1; 0)$.

Ответ: $(1; 5; 0), (-1; 5; 0), (1; 1; 0), (-1; 1; 0)$.

11 класс

1. Выяснить, при каких условиях для параметров a, b, c, d параболы

$$y = x^2 + ax + b, \quad y = x^2 + cx + d$$

имеют более одного пересечения.

Решение. Координаты точки пересечения линий должны удовлетворять системе, составленной из уравнений этих линий, и всякому следствию из нее, например, равенству правых частей: $x^2 + ax + b = x^2 + cx + d \Leftrightarrow (a - c)x = (d - b)$

Если $a \neq c$, последнее линейное уравнение (а с ним и система) имеет единственное решение: $x = (d - b) : (a - c)$. Чтобы решений было более одного, должно быть $a = c$, но тогда и $b = d$ (иначе линейное уравнение и система не имеют решений).

Ответ. При $a = c, b = d$, т.е. параболы, просто, совпадают.

2. Найти количество корней уравнения: $2^{\lg(x^2-2023)} - \lg 2^{x^2-2022} = 0$.

Решение. Используя свойство логарифмов, перепишем уравнения в следующем виде $(x^2 - 2023)^{\lg 2} - \lg 2^{x^2-2022} = 0$. Введем обозначения $z = x^2 - 2023$, $a = \lg 2$, при этом $z > 0$, $a \in (0, 1)$. Тогда $z^a = (z + 1)a$.

Пусть $y_1(z) = z^a$, $y_2(z) = (z + 1)a$. Так как $y_1(1) = 1, y_2(1) = 2a$, причем $y_1(1) = 1 = \lg 10 > \lg 4 = 2 \lg 2 = 2a$ и учитывая монотонность и выпуклость функций $y_1(z)$, $y_2(z)$ для $a \in (0, 1)$, получаем, что уравнение $z^a = (z + 1)a$ имеет два корня z_1 и z_2 , один из которых, например z_1 меньше единицы, но больше нуля, а другой корень z_2 будет больше единицы. Тогда, вспоминая замену $z = x^2 - 2023$ и возвращаясь к исходной переменной x , приходим к выводу, что исходное уравнение будет иметь 4 корня: $\pm\sqrt{z_1 + 2023}, \pm\sqrt{z_2 + 2023}$.

Ответ. 4 корня.

3. Доказать, что для любых положительных чисел a, b, c выполняется неравенство

$$\frac{2a}{3(b+c)} + \frac{2b}{3(a+c)} + \frac{2c}{3(a+b)} \geq 1.$$

Решение. Прибавив к обеим частям неравенства число 2, получим

$$\left(\frac{2a}{3(b+c)} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2b}{3(a+c)} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2c}{3(a+b)} + \frac{2}{3}\right) \geq 3.$$

$$2(a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b}\right) \geq 9.$$

$$((b+c) + (a+c) + (a+b)) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b}\right) \geq 9.$$

Используя, неравенство о средних

$$\begin{cases} (b+c) + (a+c) + (a+b) \geq 3\sqrt[3]{(b+c)(a+c)(a+b)}, \\ \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{b+c} \cdot \frac{1}{a+c} \cdot \frac{1}{a+b}}, \end{cases}$$

получим

$$\begin{aligned} & ((b+c) + (a+c) + (a+b)) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b} \right) \\ & \geq 3\sqrt[3]{(b+c)(a+c)(a+b)} \cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{b+c} \cdot \frac{1}{a+c} \cdot \frac{1}{a+b}} = 9. \end{aligned}$$

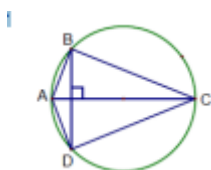
4. В четырёхугольник ABCD можно вписать и вокруг него можно описать окружность. Диагонали этого четырёхугольника взаимно перпендикулярны.

ABCD – квадрат?

Решение. Рассмотрим в окружности диаметр AC и перпендикулярную ему хорду BD, не проходящую через центр (см. рисунок). В четырёхугольник ABCD можно вписать и вокруг него можно описать окружность. Диагонали этого четырёхугольника взаимно перпендикулярны.

ABCD – квадрат?

Решение. Рассмотрим в окружности диаметр AC и перпендикулярную ему хорду BD, не проходящую через центр (см. рисунок).



Покажем, что четырёхугольник ABCD удовлетворяет условию задачи. Для этого достаточно доказать, что в него можно вписать окружность. В окружности диаметр делит перпендикулярную ему хорду пополам, значит, в треугольнике BAD высота является медианой и этот треугольник является равнобедренным: $AB=AD$. Аналогично, $CB=CD$. Так как суммы противоположных сторон четырёхугольника ABCD равны, в него можно вписать окружность.

Ответ. Нет.

5. Петя записал на доску два целых числа. Каждую минуту Вася записывал на доску новое число, равное сумме двух каких-то чисел на доске. Спустя пять минут на доске оказались числа 21, 15, 12, 9, 6, 3, -3. Выберите все числа, которые гарантированно были записаны Васей.

Решение. Заметим, что число -3 обязательно должно быть записано Петей. Действительно, если это не так, то изначально на доске были 2 положительных числа, но тогда и все последующие числа тоже были положительными, и число -3 не могло оказаться на доске. Предположим, что второе число Пети — это 3. Тогда после первой минуты будет выписано число $-3 + 3 = 0$, которого нет в итоговом списке. Аналогично, если вторым Петиним числом будет 21, то на доске после первой минуты будет выписано число $21 - 3 = 18$, которого также нет. Значит, 3 и 21 гарантированно выписаны Васей. Любое из оставшихся чисел может быть выписано Петей. Действительно, вычитая из него несколько раз 3, можно получить числа 6 и 9. Далее получаем те числа, которых не хватает, пользуясь некоторыми из равенств $6+3 = 9$, $9+3 = 12$, $12+3 = 15$, $6+15 = 21$.

Ответ: -3; 21